

11. 使 $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) 的展开式中含有常数项的最小的 n 为 _____ .

12. 已知三棱锥 $S - ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB , $SA = AC$, $SB = BC$, 三棱锥 $S - ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为 _____ .

13. 已知函数 $f(x) = 4 \cos \omega x \cdot \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 ω 的值为 _____, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单增区间是 _____ .

14. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$ _____ .

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ f(x-1) + 1, & x > 0 \end{cases}$, 把方程 $f(x) - x = 0$ 的根按从小到大顺序排成一个数列, 则该数列的前 n 项和 $S_n =$ _____ .

三、解答题

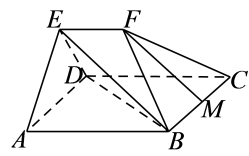
(本大题共5小题，共75分)

16. 袋子里有完全相同的3只红球和4只黑球，今从袋子里随机取球 .

(1) 若有放回地取3次，每次取一个球，求取出2个红球1个黑球的概率 .

(2) 若无放回地取3次，每次取一个球，若取出每只红球得2分，取出每只黑球得1分，求得分 ξ 的分布列和数学期望 .

17. 已知：平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $AB = AD = 2\sqrt{2}$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle AED$ 为等边三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF = \sqrt{2}$ ， M 为线段 BC 的中点．



- (1) 求证：直线 $MF \parallel$ 平面 BED ．
- (2) 求平面 BED 与平面 FBC 所成角的正弦值．
- (3) 求直线 BF 与平面 BED 所成角的正弦值．

18. 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.
- (1) 求 M 的方程.
- (2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 5$ ($n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$) , $a_1 = 1$.

(1) 若 $b_n = a_n - 2n + 1$, 求证 : 数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是常数列 , 并求 $\{a_n\}$ 的通项 .

(2) 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 又 $c_n = (-1)^n S_n$, 且 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n > tn^2$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 时恒成立 , 求实数 t 的取值范围 .

20. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 当 $a = 1$ 时 , 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立 .